Sur le théorème de M. Egoroff et sur les opérations fonctionnelles linéaires.

Par M. FRÉDÉRIC RIESZ.

Toute suite convergente de fonctions mesurables converge uniformément sauf au plus pour un ensemble de mesure aussi petite qu'on veut. Ce théorème, découvert par M. *Egoroff* en 1911,[1]) se déduit immédiatement des premiers principes de la théorie d'intégration de M. *Lebesgue*, et quelque frappant qu'il soit, ce serait exagérer sa portée d'en attendre qu'il conduise à des conséquences essentiellement nouvelles. Le plus grand mérite de la découverte de M. *Egoroff* est d'avoir mis en évidence les relations qui existent entre les théorèmes généraux de MM. *Osgood*, *Lebesgue*, *Vitali* et d'autres relatifs à l'intégration terme-à-terme des suites et le théorème classique sur l'intégration des suites uniformément convergentes. Je pense que la démonstration que je vais donner en ne supposant connues ni l'idée de fonction mesurable ni celle de mesure, contribuera aussi à ce rapprochement de la théorie de M. *Lebesgue* à l'Analyse classique.

I.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une suite monotone de fonctions continues d'une ou de plusieurs variables, définies sur un ensemble fermé E. Soit E^* un sous-ensemble fermé de E sur lequel la fonction limite est continue, bien entendu en négligeant les valeurs prises sur l'ensemble $E-E^*$. Dans ce cas, d'après un théorème connu de M. *Dini*, la suite est uniformément convergente sur l'ensemble E^*. Mais en général, quant à l'ensemble total E, on peut seulement affirmer que la fonction limite y est semicontinue. Donc tout revient à démontrer le théorème suivant:

---

[1]) D. Th. *Egeroff*, Sur les suites de fonctions mesurables, Comptes rendus, tome 152 (1911) p. 244—246.

Étant donnée, sur un ensemble fermé E, une fonction semicontinue, on peut, en enlevant de E les points appartenant à un système fini ou dénombrable d'intervalles dont la somme est aussi petite qu'on veut, rendre la fonction continue sur l'ensemble qui reste.

Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer qu'll s'agisse d'une fonction f semicontinue inférieurement c'est-à-dire telle que, pour toute quantité A, l'ensemble des points où $f \leq A$, soit fermé. Rangeons l'ensemble des nombres rationnels dans une suite $r_1, r_2, \ldots$ et soit E_k l'ensemble où $f \leq r_k$. Soit de plus I un intervalle ouvert (à une ou plusieurs dimensions) contenant E dans son intérieur. L'ensemble complémentaire de E_k par rapport à I formant un ensemble ouvert, on peut en enlever, moyennant un procédé souvent appliqué, un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles de somme arbitrairement petite, soit $< \varepsilon_k$, de sorte qu'il reste un nombre fini d'intervalles fermés. La partie de E comprise dans ces intervalles fermés est elle-même fermée et n'a aucun point de commun avec E_k. En choisissant par exemple $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}\varepsilon$ et en opérant ainsi pour toutes les valeurs de l'indice k, la somme totale des intervalles enlevés successivement ne dépassera pas la quantité ε arbitrairement choisie. Soit E^* la partie de E extérieure à tous ces intervalles. Pour chaque valeur de l'indice k, E^* se compose de deux parties dont l'une, E_k^*, partie de E_k extérieure aux intervalles enlevés, est fermée en même temps que l'ensemble E_k lui-même ; l'autre, $E^*-E_k^*$, appartenant à un nombre fini d'intervalles fermés qui n'ont aucun point de commun avec E_k^*, sera elle-même fermée. De plus, comme les ensembles E_k^* et $E^*-E_k^*$ sont compris respectivement dans les ensembles E_k et $E-E_k$, on aura $f \leq r_k$ dans E_k^*, $f > r_k$ dans $E^*-E_k^*$.

Je dis qne notre fonction est continue sur l'ensemble E^*. En effet, pour A quelconque, l'ensemble des points de E^* pour lesquels $f \geq A$ est fermé puisque c'est la partie commune des ensembles fermés $E^*-E_k^*$ correspondant aux nombres rationnels $r_k < A$. Par conséquent, la fonction est sur l'ensemble E^* semicontinue non seulement inférieurement, comme elle l'était déjà, d'après l'hypothèse faite, pour l'ensemble primitif E, mais elle l'est aussi supérieurement c'est-à-dire que, sur l'ensemble E^*, la fonction est continue, c. qu. f. d.

2.

Cela étant, envisageons une suite $f_1, f_2, \ldots,$ convergente, mais pas nécessairement monotone, dont les éléments soient des fonctions continues sur l'ensemble fermé E. Soit f^* la fonction limite et désignons par $f^{(m)}$ l'enveloppe supérieure de la suite $f_m, f_{m+1}, \ldots,$ c'est-à-dire la fonction égale en chaque point de E à la borne supérieure des valeurs respectives des fonctions f_n $(n = m, m+1, \ldots)$. La fonction $f_{(m)}$ est la limite d'une suite croissante de fonctions continues, savoir des fonctions $f_{m\,n}$ égales pour chaque $n \geq m$ et en chaque point de E, à la plus grande des valeurs respectives des fonctions $f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n$. Par conséquent, les fonctions $f^{(m)}$ sont semicontinues inférieurement. D'autre part, ces fonctions forment une suite monotone décroissante tendant vers f^*. Soit δ une quantité positive arbitrairement choisie. Comme la fonction $f^{(m)}$ est semicontinue, il existe un système d'intervalles de somme $<\frac{1}{2^m}\delta$ et tel que, en supprimant les points de E appartenant à ces intervalles, la fonction $f^{(m)}$ est continue sur l'ensemble qui reste. En opérant ainsi pour chaque valeur de l'indice m, on parvient à définir un système d'intervalles dont la somme totale est $<\delta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right) = \delta$ et tel que si l'on néglige les points de E qui y appartiennent, toutes les fonctions $f^{(m)}$ seront continues sur l'ensemble qui reste. Enfin, en appliquant à cette suite monotone de fonctions continues le théorème que nous venons de démontrer, il ne faut que supprimer encore les points appartenant à un dernier système d'intervalles de somme arbitrairement petite, soit $< \delta$, et la convergence des $f^{(m)}$ vers f^* sera uniforme sur l'ensemble qu reste

Le même raisonnement tient pour les enveloppes inférieures $f_{(m)}$ définies d'une façon analogue. En somme, on aura négligé les points de E appartenant à un système d'intervalles de somme $< 4\delta$; sur l'ensemble fermé qui reste, les suites $\{f^m\}$ et $\{f^{(m)}\}$, l'une décroissante et l'autre croissante, tenderont uniformément vers la fonction f^*. Or, en vertu des inégalités $f_{(m)} \leq f_m \leq f^{(m)}$, il en sera de même pour la suite $\{f_n\}$.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant, cas particulier du théorème de M. *Egoroff*[1]:

Étant donnée, sur un ensemble fermé, une suite convergente de fonctions continues, on peut, en supprimant les points appartenant *a un système d'intervalles de somme arbitrairement petite, rendre la convergence uniforme sur l'ensemble qui reste.*

3.

On doit à M. *Borel* une définition très simple de l'intégrale;[1]) sans supposer connue la théorie de la mesure, cette définition est néanmoins tout à fait équivalente à celle de M. *Lebesgue*[2]). La voilà. Étant donnée une fonction f définie dans un intervalle I, nous la disons *intégrable* si les deux hypothèses suivantes sont satisfaites:

1. On peut enlever de l'intervalle I un système d'intervalles de somme arbitrairement petite, de sorte que la fonction devienne intégrable au sens de Riemann sur l'ensemble fermé qui reste;

2. en faisant tendre vers zéro la somme des intervalles enlevés, la valeur de l'intégrale tend vers une limite déterminée.

Cette limite, quand elle existe, sera l'intégrale de la fonction prise sur l'intervalle I.

Remarquons qu'on peut remplacer l'hypothèse 1. par la suivante:

1a. On peut enlever de l'intervalle I un système d'intervalles de somme arbitrairement petite, de sorte que la fonction devienne continue sur l'ensemble fermé qui reste.

En effet, les points de discontinuité d'une fonction intégrable au sens de Riemann formant un ensemble de mesure nulle, pourront être enfermés dans des intervalles dont la somme sera aussi petite qu'on voudra.

Ceci dit, faisons abstraction de l'hypothèse 2. et considérons seulement l'hypothèse 1a. En partant de la théorie de M. *Lebesgue*, on montre aisément que cette hypothèse est équivalente à la suivante: la fonction f est *mesurable* sur l'intervalle I. Mais on peut aussi définir les fonctions „mesurables" par l'hypothèse 1a., c'est-à-dire sans se servir de la théorie de la mesure. Or, pour

---

[1]) E. *Borel*, Sur la définition de l'intégrale définie, Comptes rendus, tome 150 (1900) p. 375—377.

[2]) H *Hahn*, Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Integraldefinition, Monatshefte für Mathematik u. Physik, 26. Jahrgang (1915) p. 3—18, T. H. *Hildebrandt*, On integrals related to and extensions of the Lebesgue integrals, Bulletin of the American Math. Society, vol. 24 (1917—8) p. 113—114. 177—202. cf. p. 135—138. et p. 202.

les fonctions mesurables ainsi définies, le théorème de M. *Egoroff* est à-peu-près évident. En effet, soit $\{ f_n \}$ une suite convergente de fonctions mesurables et soit f^* leur limite. En se donnant arbitrairement une quantité positive ε, on peut d'après l'hypothèse 1a, enlever de l'intervalle I un système d'intervalles de somme $< \frac{1}{2^n}\varepsilon$, de sorte que la fonction f_n soit continue sur l'ensemble qui reste. En opérant ainsi pour tous les $n = 1, 2, \ldots$, on parvient à supprimer un système d'intervalles de somme $< \varepsilon$ et les fonctions f_n seront continues sur l'ensemble fermé que reste. Par conséquent on peut, d'après le théorème démontré, enlever les points appartenant à un dernier système d'intervalles de somme $< \varepsilon$ et cela de sorte que la convergence des f_n vers f^* soit uniforme sur l'ensemble qui reste.

Voilà une autre définition des fonctions mesurables équivalente à celle de M. *Lebesgue.* Une fonction f, définie sur l'intervalle I, sera dite mesurable, si elle est la limite, presque partout (c'est-à-dire sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle), d'une suite de fonctions continues sur l'intervalle I. En ce qui concerne les points d'exception, la suite y peut être convergente sans tendre vers f ou bien elle y peut être divergente.

En partant de cette définition et d'après ce qui précède, *le théoréme de M. Egeroff est presque évident.* Il s'en suit immédiatement que *la limite d'une suite presque partout convergente de fonctions mesurables est elle-même une fonction mesurable.* Il en est de même si l'on remplace, dans la définition que nous venons de formuler, l'hypothèse de la continuité par l'autre que les éléments de la suite soient des fonctions *simples* c'est-à-dire constantes par des intervalles. D'ailleurs on voit aisément que la définition ainsi modifiée est équivalente à la précédente.

4.

J'ai montré ailleurs comment on peut développer la théorie de l'intégration, dans la même généralité que l'a fait M. *Lebesgue,* en partant des suites dont je viens de parler, formées de fonctions simples et convergant presque partout.[1]) Le cas particulier correspondant du théorème de M. *Egoroff* y jouait un rôle essentiel.

[1]) F. *Riesz,* Sur l'intégrale de Lebesgue, Acta mathematica, tome 42, (1919) p. 192—205.

La démonstration y donnée est moins simple et moins générale que celle que je viens d'exposer et en combinant les deux méthodes, on pourrait rendre encore plus élémentaire la théorie que j'ai autrefois développée. Pour éviter double emploi, je passerai à un ordre d'idées plus général en essayant d'esquisser le rôle qui revient au théorème de M. *Egoroff* dans la théorie des *opérations fonctionnelles linéaires.*

Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse des fonctions d'une seule variable, définies dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, et envisageons la totalité Ω des fonctions continues dans cet intervalle. L'opération fonctionnelle $A[f(x)]$, faisant correspondre à chaque élément de Ω un nombre déterminé, est dite continue si, pour chaque suite $f_1, f_2, \ldots$ tendant uniformément vers une fonction f, les valeurs $A[f_m]$ tendent vers la limite $A[f]$. Une opération distributive et continue à la fois est dite linéaire. On voit aisément qu'une telle opération est aussi bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante M de sorte que l'on ait, pour chaque élément f de Ω:

$$|A[f]| \leqq M \times \max |f|$$

J'ai étudié ces opérations linéaires à plusieurs reprises et j'ai montré comment on peut les représenter par des intégrales de *Stieltjes.*[1]) Cette question revient, comme je l'avais exposé d'une façon détaillée dans le dernier des travaux cités, à la possibilité d'étendre l'opération à un champs fonctionnel plus large, comprenant les fonctions simplement discontinues et la méthode dont je me suis servi pour effectuer ce prolongement, conduisait encore plus loin et aboutit à définir l'opération pour toutes les fonctions semicontinues et pour leurs combinaisons linéaires. D'autre part, mes premières recherches sur ce sujet fournissaient l'occasion à M. *Lebesgue* d'établir le lien entre les intégrales de *Stieltjes* et les siennes;[2]) de cette relation, il s'ensuit immédiatement qu'on peut, avec quelques réserves, prolonger le champs des opérations

---

[1]) F. *Riesz,* Sur les opérations fonctionnelles linéaires, Comptes rendus, tome 149 (1909) p. 974—77; Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, Annales de l'Ecole normale superieure, 3 série, tome 28 (1911) p. 33—62; Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires, ibidem, 3. serie tome 31 (1914) p. 9—14.

[2]) H. *Lebesgue,* Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionnelles linéaires, Comptes rendus, tome 150 (1910) p. 86—88.

linéaires jusqu' aux fonctions mesurables. L'étude des généralisations des deux catégories d'intégrales fut encore poussé plus loin par MM. W. H. *Young*[1]) et *Radon*[2]), et enfin M. *Fréchet*, en modifiant légèrement l'ordre d'idées suivi par ce dernier, étendait la définition et les propriétés de l'intégrale aux fonctions définies sur des ensembles abstraits.[3])

Quel rôle revient-il, dans ces généralisations, au théorème de M. *Egoroff*? Tout d'abord, est-ce qu'il reste valable sans modification? Il n'en est rien, comme on le montre aisément en partant de la remarque que dans les calculs concernant les intégrales de *Stieltjes*, c'est par la variation ou par la variation totale d'une fonction qu'on mesure les ensembles et que cette variation ne devient pas nécessairement infiniment petite avec la mesure (au sens ordinaire) de l'ensemble. Mais cette remarque indique aussi la voie pour maintenir le théorème. En effet, étant donnée l'opération linéaire $A[f(x)]$ dont nous avons parlé, convenons d'appeler *longueur* de l'intervalle ouvert $c < x < d$ *par rapport à l'opération A* ou brièvement longueur de l'intervalle *cd*, la borne supérieure des valeurs que prend l'opération quand on l'applique à toutes les fonctions continues de module maximum $\leqq 1$ et s'annulant à l'extérieur de l'intervalle *cd*. Quand on connait la fonction génératrice $\alpha(x)$ de l'opération A, c'est-à-dire la fonction à variation bornée figurant dans l'intégrale de *Stieltjes* correspondante, cette longueur de l'intervalle *cd* est fournie par la variation totale de la fonction $\alpha(x)$ sur la partie commune de l'intervalle ouvert *cd* et de l'intervalle fermé *ab*. On voit sans peine que toutes nos considérations restent valables lorsque nous formons la somme des intervalles conformément à cette nouvelle définition de la longueur. Bien entendu, le sens des définitions dans lesquelles intervient la longueur, dépendra du choix particulier de l'opération A; ainsi, par exemple, il n'y aura plus de fonctions mesurables,

---

1) V. H. *Young*, On integration with respect to a function of bounded variation, Proceedings of the London Math. Society, ser 2, vol. 13 (1914) p. 109—150.

2) J *Radon*, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Abt. 2. 122 (1913) p. 1295—1438.

3) M. *Fréchet*, Sur l'intégrale d'une fontionnelle étendue à un ensemble abstrait, Bulletin de la Societé math. de France, tome 43 (1915) p. 248—265

mais seulement des fonctions *mesurables par rapport à l'opération* A ou à la fonction $\alpha(x)$, le cas ordinaire étant celui où $\alpha(x) = x$.

Sans entrer dans les détails, je me contenterai d'esquisser brièvement comment on peut étendre l'opération définie pimitivement pour les fonctions continues, à toutes les fonctions mesurables et bornées. Nous dirons que la fonction $f(x)$ est mesurable (par rapport à l'opération A), lorsque c'est la limite, presque partout, d'une suite de fonctions $f_n(x)$ convergeant presque partout. L'expression „presque partout" veut dire: sauf un ensemble qu'on peut enfermer dans des intervalles de „somme" arbitrairement petite. Quand $f(x)$ est bornée, soit $|f(x)| \leqq G$, on peut supposer que les fonctions $f_n(x)$ soient bornées dans leur ensemble, c'est-à dire toutes inférieures en module à une constante G_1. En effet, dans le cas contraire, on pourra les modifier en remplaçant leur valeur, partout où celle-ci n'est pas comprise entre les deux bornes de $f(x)$, par la borne plus proche.

Cela étant, je dis que *les valeurs* $A[f_n]$ *tendent vers une limite déterminée.* En effet, en interprétant dans les raisonnements déjà faits, la somme des intervalles dans le sens que nous venons de préciser, il viendra que la suite des f_n peut être rendue uniformément convergente en supprimant un système d'intervalles dont la somme est aussi petite que l'on veut. C'est-à-dire que, ayant choisi arbitrairement une quantité positive ε, on aura pour toutes les valeurs suffisamment grandes des indices m et n:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon,$$

sauf peut-être dans des intervalles I_1, I_2 . . . dont la „somme" ne dépasse pas ε. Posons $f_m(x) - f_n(x) = g(x)$ et soit $g_k(x)$ la fonction continue bien déterminée s'annulant à l'extérieur de l'intervalle I_k et, dans l'intérieur de I_k, égale à $g(x) \pm \varepsilon$.

On voit aisément que la somme des fonctions g_k, uniformément convergente quand il y a une infinité d'intervalles, ne diffère de g que par une fonction continue $g_0(x)$ dont le module ne surpasse pas ε. On en déduit immédiatement l'inégalité

$$|A[f_m] - A[f_n]| \leqq (M + 2G_1)\varepsilon$$

et par conséquent, la convergence des $A[f_n]$ vers une limite déterminée. Cette limite ne dépend que de la fonction f, c'est-à-dire qu'elle est la même pour deux suites $\{f_n\}$ et $\{f_n'\}$ tendant presque partout vers la même fonction f, ce qu'on voit immédiatement en les réunissant dans une seule suite $f_1, f_1', f_2, f_2', \ldots$ tendant aussi presque partout vers la fonction f. En attachant cette limite à la fonction f comme valeur correspondante de l'opération $A[f]$, on aura le *prolongement* exigé.

Pour plus de détails, je renvoie à mon mémoire déjà cité „*Sur l'intégrale de Lebesgue*", dont les méthodes s'appliquent à notre cas d'une façon presque évidente. Nos raisonnements s'étendent aussi immédiatement au cas de plusieurs variables. Pour les ensembles abstraits, le problème est un peu plus délicat; dans ce cas, il n'y a rien de primitivement donné qui correspondrait aux intervalles ou aux ensembles fermés ou bien aux fonctions continues et le rôle que jouent ces ensembles ou ces fonctions dans nos raisonnements, devra être attribué à certaines classes d'ensembles ou de fonctions qu'il faudra introduire d'une façon plus ou moins artificielle. Je ne m'en occupe pas, car dans ce cas général, les méthodes antérieures conduiront plus facilement au but.